A -11

Semi Modul Interval [0,1] Atas Semi Ring Matriks Fuzzy Persegi

Suroto, Ari Wardayani

Jurusan Matematika Universitas Jenderal Soedirman
suroto_80@yahoo.com

Abstrak**—**Pada makalah ini akan dibahas mengenai interval [0,1] dan matriks fuzzy persegi. Dengan memanfaatkan operasi biner pada semi ring fuzzy [0,1], akan dibuktikan struktur aljabar yang terbentuk dari interval [0,1] dan semi ring matriks fuzzy persegi. Hasil yang diperoleh adalah interval [0,1] merupakan semi modul atas semi ring matriks fuzzy persegi.

Kata kunci: matriks fuzzy, persegi, semi modul, semi ring

I. PENDAHULUAN

Operasi biner pada suatu himpunan tak kosong S merupakan suatu fungsi dari SxS ke S [1]. Monoid merupakan suatu sistem matematika yang terdiri atas sebuah himpunan tak kosong dan dilengkapi dengan sebuah operasi biner yang memenuhi sifat assosiatif dan memiliki elemen identitas [2]. Selanjutnya suatu monoid yang operasi binernya bersifat komutatif dinamakan monoid komutatif.

Suatu semi ring R merupakan sebuah himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner yakni penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi R adalah monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan, R monoid terhadap operasi pergandaan, berlaku sifat distributif pergandaan terhadap penjumlahan, dan elemen identitas penjumlahan merupakan elemen penyerap pada R [3]. Suatu semi ring dikatakan komutatif apabila operasi pergandaannya bersifat komutatif. Semi ring yang terbentuk dari interval tutup [0,1] yang dilengkapi dengan operasi penjumlahannya adalah maksimum serta operasi pergandaannya adalah minimum dinamakan semi ring fuzzy [4]. Misalkan R adalah suatu semi ring maka semi modul M atas R adalah semigrup komutatif M bersama dengan oeprasi pergandaan scalar $\cdot :\ S \times M \to M$ yang memenuhi aksioma

(i) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
(ii) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
(iii) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$
(iv) $1 \cdot x = x$
(v) $0 \cdot x = 0$

untuk setiap a dan b elemen pada S, serta x dan y elemen pada M [5]. Selanjutnya elemen pada semi modul M ini sering dinamakan vector [1].

Matriks fuzzy merupakan matriks yang entri-entrinya merupakan elemen pada semi ring interval [0,1] [4]. Selanjutnya operasi penjumlahan dan pergandaan matriks fuzzy ini didefinisikan sebagaimana operasi penjumlahan dan pergandaan pada matriks biasa, tetapi operasi penjumlahan dan pergandaan pada entri-entrinya mengadopsi dari operasi penjumlahan dan pergandaan pada semi ring fuzzy. Pada makalah ini dibahas mengenai struktur aljabar yang terbentuk dari matriks fuzzy persegi dengan operasi penjumlahan dan pergandaannya seperti pada [6] dan interval tutup [0,1] dengan menggunakan operasi penjumlahan pada semi ring fuzzy. Pada bagian utama makalah ini akan disajikan pembuktian tentang interval tutup [0,1] merupakan semigrup komutatif, himpunan semua matriks fuzzy persegi merupakan semi ring, dan interval tutup [0,1] merupakan semi modul atas semi ring matriks fuzzy persegi.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Semi Grup Interval [0,1]*

Interval [0,1] merupakan himpunan semua bilangan riil yang lebih dari atau sama dengan 0 dan kurang dari atau sama dengan 1. Sebelum menunjukkan bahwa interval [0,1] merupakan suatu semigrup, terlebih dahulu didefinisikan operasi penjumlahan pada interval [0,1] yakni

$$a + b = maks\,\{a, b\}$$

untuk setiap $a, b \in [0,1]$.
Perhatikan bahwa sistem matematika $([0,1], +)$ merupakan semigrup, seperti disajikan pada teorema berikut ini.

Teorema 1

Sistem matematika ([0,1] , +) adalah semigrup

Bukti

Perhatikan bahwa untuk setiap $a, b, c \in [0,1]$ berlaku $a + b = maks\,\{a, b\}$, yang tak lain merupakan elemen pada interval [0,1]. Dengan demikian operasi penjumlahan bersifat tertutup pada [0,1]. Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + maks\,\{b, c\} \\ &= maks\,\{a, maks\{b, c\}\} \\ &= maks\,\{a, b, c\} \\ &= maks\,\{maks\{a, b\}, c\} \\ &= (a + b) + c. \end{aligned}$$

Dengan demikian sifat assosiatif penjumlahan berlaku pada interval [0,1]. Dari uraian tersebut diperoleh bahwa [0,1] merupakan semigrup terhadap operasi penjumlahan. ■

Teorema 2

Operasi penjumlahan pada semigrup ([0,1] , +) bersifat komutatif dengan elemen identitas

Bukti

Perhatikan bahwa untuk setiap $a, b \in [0,1]$ berlaku

$$\begin{aligned} a + b &= maks\,\{a, b\} \\ &= maks\,\{b, a\} \\ &= b + a \end{aligned}$$

Dengan kata lain operasi penjumlahan bersifat komutatif pada M. Sementara itu, perhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned} 0 + a &= maks\,\{0, a\} \\ &= maks\,\{a, 0\} \\ &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

sehingga 0 merupakan elemen identitas pada M terhadap operasi penjumlahan. ■

Berdasarkan uraian Teorema 1 dan Teorema 2 diperoleh bahwa $([0,1], +)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan.

Teorema 3

Sistem matematika ([0,1], maks, min) merupakan semi ring.,

Bukti

Menurut pembahasan pada Teorema 1 dan Teorema 2 diperoleh bahwa $([0,1], maks)$ merupakan monoid komutatif terhadap operasi $maks$. Selanjutnya tinggal ditunjukkan pada operasi min. Perhatikan bahwa untuk setiap $a, b \in [0,1]$ berlaku $min\,\{a, b\}$ merupakan elemen pada interval [0,1]. Dengan demikian operasi min bersifat tertutup pada [0,1]. Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} min\{a, min\{b, c\}\} &= min\{a, b, c\} \\ &= min\{min\{a, b\}, c\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian sifat assosiatif penjumlahan berlaku pada interval [0,1]. Dari uraian tersebut diperoleh bahwa [0,1] merupakan semigrup terhadap operasi min. Lebih lanjut perhatikan juga bahwa untuk setiap $a, b \in [0,1]$ berlaku

$$min\,\{a, b\} = min\,\{b, a\}$$

yang dengan kata lain operasi min bersifat komutatif pada M.

Sementara itu, perhatikan juga bahwa

$$min\,\{1, a\} \;=\; min\,\{a, 1\} = \;a$$

sehingga 1 merupakan elemen identitas pada M terhadap operasi min. Sifat distributif operasi min terhadap operasi $maks$ juga berlaku, karena untuk setiap $a, b, c \;\in\; [0,1]$ berlaku

$$min\{a, maks\{b, c\}\} \;=\; maks\,\{min\{a, b\}, min\{a, c\}\}$$

dan

$$min\{\,maks\{b, c\}, a\,\} \;=\; maks\,\{min\{b, a\}, min\{c, a\}\}.$$

Sementara itu elemen nol pada [0,1] yaitu 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi min, yakni untuk setiap $a \;\in\; [0,1]$ berlaku

$$min\{0, a\} \;=\; min\{a, 0\} \;=\; 0.$$

Dengan demikian [0,1] merupakan semi ring. ■

B. *Semi Ring Matriks Fuzzy Persegi*

Sebelum membahas lebih jauh mengenai semi ring matriks fuzzy, terlebih dahulu didefinisikan matriks fuzzy seperti definisi berikut ini.

Definisi 4 [7]
Misalkan [0,1] adalah semi ring fuzzy, maka matriks A = [a_{ij}] dengan a_{ij} ∈ [0,1] dinamakan matriks fuzzy.

Selanjutnya, suatu matriks fuzzy dikatakan persegi apabila banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Operasi penjumlahan dan pergandaan matriks fuzzy didefinisikan sebagaimana operasi penjumlahan dan pergandaan matriks biasa. Misalkan $A \;=\; [a_{ij}]$ dan $B \;=\; [b_{ij}]$ masing-masing merupakan matriks fuzzy persegi yang berordo n, maka operasi penjumlahan dan pergandaannya didefinisikan berturut-turut sebagai

$$A \;+\; B \;= \left[a_{ij} + b_{ij}\right] = \left[maks\{a_{ij}, b_{ij}\}\right]$$

dan

$$AB \;= [\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\;] = maks_{k=1}^{n}\left\{min\left\{a_{ik}, b_{kj}\right\}\right\}$$

untuk setiap $i, j \;=\; 1, 2, \dots, n.$ s

Teorema 5
Misalkan M adalah himpunan semua matriks fuzzy persegi, maka M merupakan suatu semi ring, dan selanjutnya dinamakan semi ring matriks fuzzy persegi
Bukti
Misalkan ambil sembarang matriks fuzzy persegi $A \;=\; [a_{ij}]$, $B \;=\; [b_{ij}]$ dan $C \;=\; [c_{ij}]$ yang berordo n. Perhatikan bahwa hasil penjumlahan dari A dan B yakni

$$A \;+\; B \;= \left[a_{ij} + b_{ij}\right] = \left[maks\{a_{ij}, b_{ij}\}\right]$$

juga merupakan matriks fuzzy persegi. Dengan demikian operasi penjumlahannya bersifat tertutup pada himpunan M. Operasi penjumlahan bersifat assosiatif pada M. Hal ini dikarenakan

$$\begin{aligned}
(A + B) + C \quad &= \left[a_{ij} + b_{ij}\right] + \left[c_{ij}\right] \\
&= \left[maks\{a_{ij}, b_{ij}\}\right] + \left[c_{ij}\right] \\
&= \left[maks\left\{\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\right\}\right] \\
&= \left[maks\{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}\}\right] \\
&= \left[maks\{a_{ij}, \{b_{ij}, c_{ij}\}\}\right] \\
&= \left[a_{ij}\right] + \left[maks\{a_{ij}, b_{ij}\}\right]
\end{aligned}$$

$= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$

$= A + (B + C)$

Matriks $0 = [0_{ij}]$ dimana $0_{ij} = 0$ untuk setiap i dan j, merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan pada M. Sementara itu juga berlaku bahwa

$$
\begin{aligned}
A + B &= [a_{ij} + b_{ij}] \\
&= [maks\{a_{ij}, b_{ij}\}] \\
&= [maks\{b_{ij}, a_{ij}\}] \\
&= [b_{ij} + a_{ij}] \\
&= B + A
\end{aligned}
$$

Dengan demikian operasi penjumlahan bersifat komutatif pada M, sehingga M merupakan monoid komutatif. Berdasarkan uraian diatas diperoleh bahwa M merupakan suatu monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan.

Selanjutnya perhatikan bahwa untuk setiap matriks fuzzy persegi $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ dan $C = [c_{ij}]$ yang berordo n, maka berlaku bahwa hasil pergandaan dari A dan B yakni

$$AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\ ] = maks_{k=1}^{n} \left\{min\{a_{ik}, b_{kj}\}\right\}$$

juga merupakan matriks fuzzy persegi. Dengan demikian operasi pergandaannya bersifat tertutup pada himpunan M. Selain itu operasi pergandaan bersifat assosiatif pada M, hal ini dikarenakan

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= [\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}]\ [c_{ij}] \\
&= [maks_{k=1}^{n} \left\{min\{a_{ik}, b_{kj}\}\right\}]\ .\ [c_{ij}] \\
&= [maks_{t=1}^{n}\ \{maks_{k=1}^{n} \left\{min\{a_{ik}, b_{kj}\}\right\}_{it}, c_{tj}\}] \\
&= [maks_{t=1}^{n}\ \{a_{it}, \{maks_{k=1}^{n} \left\{min\{b_{ik}, c_{kj}\}\right\}_{it}] \\
&= [a_{it}].[\{maks_{k=1}^{n} \left\{min\{b_{ik}, c_{kj}\}\right\}_{it}] \\
&= [\textstyle\sum_{t=1}^{n} a_{it} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, c_{kj}\right)_{tj}\ ] \\
&= [a_{ij}]\ [\textstyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, c_{kj}] \\
&= A(BC).
\end{aligned}
$$

Kemudian matriks I = $[a_{ij}]$ dimana $a_{ij} = 1$ untuk setiap $i = j$, dan $a_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$, merupakan elemen identitas terhadap operasi pergandaan pada M.

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh bahwa M merupakan suatu monoid terhadap operasi pergandaan. Selanjutnya sifat distribusi operasi pergandaan terhadap operasi penjumlahan juga berlaku pada M, dan elemen identitas penjumlahan pada M merupakan elemen penyerap terhadap operasi pergandaan, karena untuk setiap matriks fuzzy persegi $A = [a_{ij}]$ berlaku

$$
\begin{aligned}
A0 &= [\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, 0_{kj}] \\
&= [\ maks\ \{min\{a_{ik}\ , 0\}] \\
&= [a_{ik}] \\
&= A,
\end{aligned}
$$

dan

$$0A = [\textstyle\sum_{k=1}^{n} 0_{ik}\, a_{kj}]$$

= [$maks\ \{min\{0\ , a_{kj}\}]$

= $[a_{kj}]$]

= A

Dengan demikian matriks 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi pergandaan pada M.

Menurut uraian tersebut diperoleh bahwa himpunan semua matriks fuzzy persegi merupakan semi ring. ■
Untuk selanjutnya, semi ring pada Teorema 5 ini cukup dinamakan sebagai **semi ring matriks fuzzy persegi**.

C. Semi Modul Interval [0,1]

Sudah diketahui bahwa M adalah semi ring matriks fuzzy persegi dan [0,1] adalah semigrup komutatif dengan elemen identitas. Terlebih dahulu didefinisikan operasi $\cdot : M\ x\ [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan definisi $[a_{ij}].\ k\ = (\ a_{11} +\ a_{22} + \cdots +\ a_{nn}).\ k$, untuk setiap $[a_{ij}] \in M$ dan $k \in [0,1]$.
Perhatikan bahwa untuk setiap $X = [x_{ij}],\ Y\ = [y_{ij}]\ \in\ M$ dan $a, b\ \in\ [0,1]$ berlaku

(i) $X \cdot (a + b)$ $= [x_{ij}] \cdot (a\ +\ b)$

$= (\ x_{11} +\ x_{22} + \cdots +\ x_{nn}\ ) .(a + b)$

$= maks\{\ x_{11}, x_{22}, \dots , x_{nn}\}.\ (a + b)$

$= maks\{\ x_{11}, x_{22}, \dots , x_{nn}\}.\ a + maks\{\ x_{11}, x_{22}, \dots , x_{nn}\}.\ b$

$= [x_{ij}] \cdot a + [x_{ij}] \cdot b$

$= X \cdot a + X.b$

ii) $(X + Y) \cdot a$ $= ([x_{ij}] + [y_{ij}]) \cdot a$

$= [x_{ij} + y_{ij}] \cdot a$

$= ((\ x_{11} + y_{11}) + (x_{22} + y_{22}) + \cdots + (\ x_{nn} + y_{nn})).\ a$

$= ((\ x_{11} +\ x_{22} + \cdots +\ x_{nn}) + (\ y_{11} +\ y_{22} + \cdots +\ y_{nn})).\ a$

$= (maks\{\ x_{11}, x_{22}, \dots , x_{nn}\} + maks\{\ y_{11}, y_{22}, \dots , y_{nn}\}).\ a$

$= (maks\{\ x_{11}, x_{22}, \dots , x_{nn}\}).\ a + (maks\{\ y_{11}, y_{22}, \dots , y_{nn}\}).\ a$

$= [x_{ij}].\ a + [y_{ij}] \cdot a$

$= X.\ a + Y \cdot a$

(iii) $(X.Y) \cdot a$ $= ([x_{ij}].\ [y_{ij}]) \cdot a$

$= [\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\ y_{kj}] \cdot a$

$= (\sum_{k=1}^{n} x_{1k}\ y_{k1} + \sum_{k=1}^{n} x_{2k}\ y_{k2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} x_{nk}\ y_{kn}).\ a$

$= maks\{(\sum_{k=1}^{n} x_{1k}\ y_{k1}, \sum_{k=1}^{n} x_{2k}\ y_{k2}, \dots , \sum_{k=1}^{n} x_{nk}\ y_{kn}).\ a$

$= (maks\{\ x_{11}, x_{22}, \dots , x_{nn}\}).\ ((maks\{\ y_{11}, y_{22}, \dots , y_{nn}\}).\ a)$

$= [x_{ij}].\ ([y_{ij}] \cdot a)$

$= X.\ (Y \cdot a)$

(iv) $I \cdot a$ $= [i_{ij}].\ a$

$= (\ i_{11} +\ i_{22} + \cdots +\ i_{nn}\ ) .a$

$= maks\{\ i_{11}, i_{22}, \dots , i_{nn}\}.\ a$

$= 1. a$

$= a$

(v) $0. a$ $= [0_{ij}]. a$

$= (0_{11} + 0_{22} + \cdots + 0_{nn}) .a$

$= maks\{ 0_{11}, 0_{22}, \ldots , 0_{nn}\}. a$

$= 0. a$

$= 0$

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh bahwa [0,1] merupakan semi modul atas M. Dengan demikian diperoleh hasil utama pada makalah ini berupa suatu sifat yang disajikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 6
Interval [0,1] merupakan semi modul atas semi ring matriks fuzzy persegi.

III. Simpulan dan Saran

Dari interval [0,1] dapat dibentuk suatu semi modul dengan cara mendefinisikan operasi pergandaan skalarnya sebagai operasi pergandaan pada semi ring fuzzy yakni antara jumlahan pada entri-entri diagonal utama dengan sembarang elemen pada interval tutup [0,1]. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada pembentukan semi modul atas semi ring sembarang matriks fuzzy.

Daftar Pustaka

[1] T.W. Judson, "Abstract Algebra Theory and Application". USA : Virginia Commonwealth University Mathematics.2011

[2] J.B. Fraleigh, "A First Course in Abstract Algebra, 7^{rd} Edition". New York: Addison-Wesley Publising Company.2002

[3] Y. Monikarchana and N. Sulochana, "Some Studies on Semirings", International Journal of Mathematics Trends and Technology, Volume 4 Issue 11-December 2013. pp. 344 – 349

[4] J. Ahsan, K. Saefullah, and M. Farid Khan, "Fuzzy Semirings", Journal in Fuzzy Sets and Systems, Volume 60 Issue 3, December 1993, pp. 309 – 320

[5] A.M. Rudhito, Semi modul Bilangan Fuzzy R_{max}^{n} atas Aljabar Max Plus Bilangan Fuzzy R_{max} . Prosiding Seminar Nasional Matematika. UPI. 2007

[6] H. Wang, *The Fuzzy Non Singular Matrices.* Dept of Basis Liaoyang of Petrochemistry China, 1984.

[7] F.I. Sidky and E.G. Emam, "Some Remarks on Sections of a Fuzzy Matrix", J.K.A.U.Sci. Vol. 4. 1992. pp. 145 – 155